Высказывания. Алгебра высказываний. Законы алгебры логики.

Вся история человечества - это решение многих житейских задач. Только умение здраво мыслить, рассуждать, доказывать и делать выводы позволяет успешно справляться с такими задачами. *Логика - наука о формах и законах человеческого мышления.*

Слово «логика» происходит от греческого «logos», что означает – мысль, мышление, речь, разум, смысл... Основоположником логики считают древнегреческого философа Аристотеля. Логика Аристотеля, это, так называемая, *формальная* (классическая) логика. Именно Аристотель сформулировал основные понятия, которыми оперирует логика («умозаключение», «суждение», «понятие»). А также - законы логики, метод дедукции, понятие гипотезы.

Со временем в своем развитии логика перешла от *формальной* к *математической* (от словесной формы описания рассуждений к символьной). Тогда же появились математические методы исследования. Основоположником математической логики считают Г.В.Лейбница (1646 - 1716).

В 19 веке появился раздел математической логики – *алгебра логики*, которая оперирует с двоичными переменными, принимающими только два значения – «истина» и «ложь». Алгебру логики в честь ее создателя, английского математика Дж. Буля, назвали *булевой алгеброй*. При этом формальная логика не утратила своего значения, и в настоящее время широко используется в философии, юриспруденции, криминалистике, психологии и т.д.

Но нас сейчас интересует булева алгебра, которая нашла свое практическое применение в технической области – используется для решения сложных математических задач, при написании алгоритмов и программ, разработке электронных устройств, компьютеров, автоматических систем, в робототехнике и т.д.

Свое понимание окружающего мира человек формулирует в виде высказываний, определяемых как повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинное или ложное утверждение оно содержит.

Примеры высказываний: «Звезды видны на небе только ночью», «Земля покоится на трех китах» и т.д.

Высказывания могут быть выражены не только с помощью естественных языков, но и на формальных языках, например:

- с помощью языка математических символов – «5*5>16»;
- с помощью физических формул «S=V*T» и т.д.

О простых высказываниях всегда можно сказать, истинны они или ложны. Вывод этот делается исходя из здравого смысла. Поэтому высказывания не могут быть выражены вопросительными или побудительными предложениями, так как оценка истинности или ложности таких предложений невозможна, например: «Не играй с огнем!», «Все в порядке?»

До сих пор мы говорили о простых высказываниях. Используя специальные слова, подразумевающие определенные логические связи между высказываниями (связки), можно из простых высказываний получить *сложное высказывание.*

Рассмотрим специальную терминологию, применяемую при изучении сложных высказываний.

Логические связки и кванторы	Название логических связок и кванторов	Примеры высказываний
...и... ...а... ...но...	Конъюнкция (логическое умножение)	Налетел ветер и пошел дождь
...или либо..., либо... или..., или...	Дизъюнкция (логическое сложение)	За отличную учебу в школе я получу золотую или серебряную медаль
не неверно, что...	Инверсия (логическое отрицание)	Мы не умеем читать. Неверно, что Земля – спутник Венеры
если..., то... из... следует... ... достаточно для...	Импликация (логическое следование)	Если будет солнечно, то мы отправимся на пляж
...тогда и только тогда, когда... ... если и только если... ... необходимо и достаточно...	Эквивалентность (логическое равенство)	Я поеду в Таиланд тогда и только тогда, когда приобрету путевку
все, всякий, каждый	Квантор общности	Все люди любят мир. Каждый ребенок мечтает вырасти.
некоторые, существуют	Квантор существования	Некоторые коты – черные. Существуют ядовитые растения.

Для определения истинности или ложности сложных (составных) высказываний не вникая в их содержание, и создана алгебра логики.

На основе логической связи между простыми высказываниями, входящими в состав сложного высказывания, делается *логический вывод*. Для получения логического вывода составляют таблицу истинности, в которой перечисляют все комбинации значений («истина» или «ложь») простых высказываний и, реализуя логическую связь, получают результат. Проанализировав этот результат, определяют все истинные значения сложного высказывания.

В алгебре логики простые высказывания заменяются логическими переменными, которые обозначаются буквами латинского алфавита. Важно, что значения этих переменных могут быть только 0 или 1. Логические связки заменяют соответствующими математическими символами, а сложное высказывание превращается в *логическую функцию.*

Логической функцией F от набора логических переменных (a, b, c, …) называется функция, которая может принимать только два значения: 0 и 1.

Таблица истинности функции зависит от количества логических переменных этой функции и содержит 2^n наборов переменных. Для функции F(a,b), таблица истинности состоит из 4 наборов переменных. Логические значения называют также значениями истинности.

В алгебре логики в качестве операций используются, например, конъюнкция, дизъюнкция, инверсия, импликация, эквивалентность. Рассмотрим подробнее эти операции.

Конъюнкция. Обозначения: $\wedge, \cdot$, &

$F(a, b) = a \wedge b$

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция. Обозначения: $\vee, +$

$F(a, b) = a \vee b$

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Инверсия. Обозначения: $\bar{\ }$, $\neg$

$F(a) = \neg a$

a	$\neg a$
0	1
0	1
1	0
1	0

Импликация. Обозначения: $\Rightarrow, \supset$

$F(a, b) = a \Rightarrow b$

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность. Обозначения: $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$

$$F(a, b) = a \Leftrightarrow b$$

a	b	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Законы алгебры логики

Применение законов логики позволяет сокращать количество переменных в логических выражениях. Такие логические выражения называются минимизированными.

№	Закон	Представление в алгебре логики
1	Переместительный (коммутативный)	$a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$
2	Сочетательный (ассоциативный)	$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$; $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
3	Распределительный (дистрибутивный)	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$; $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
4	Законы де Моргана	$\neg (a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$; $\neg (a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
5	Закон двойного отрицания	$\neg\neg a = a$
6	Операции с переменной и её инверсией	$a \wedge \neg a = 0$; $a \vee \neg a = 1$
7	Свойства операции конъюнкции и дизъюнкции	$a \vee 1 = 1$; $a \wedge 1 = a$; $a \vee 0 = a$; $a \wedge 0 = 0$
8	Законы идемпотентности	$a \vee a = a$; $a \wedge a = a$
9	Законы поглощения	$a \vee (a \wedge b) = a$; $a \wedge (a \vee b) = a$

Пример 1. Доказать, что $a \vee \neg a = 1$.

Доказательство проведем, применив к заданному выражению закон де Моргана и операцию с переменной и её инверсией:

$a \vee \neg a = \{4\} = \neg (\neg a \wedge a) = \{6\} = \neg 0 = 1$.

Пример 2**.** Доказать, что $\neg (a \vee b) \wedge (a \wedge \neg b) = 0$

Доказательство проведем, применив к заданному выражению закон де Моргана, сочетательный закон, операцию с переменной и её инверсией, а затем дважды – свойство операции конъюнкции:

$\neg (a \vee b) \wedge (a \wedge \neg b) = \{4\} = \neg a \wedge \neg b \wedge (a \wedge \neg b) = \{2\} = \neg a \wedge a \wedge \neg b \wedge \neg b = \{6\} =$

$= 0 \wedge \neg b \wedge \neg b = \{7\} = 0 \wedge \neg b = \{7\} = 0$

Пример 3**.** Упростить логическую функцию:

$$F (a, b, c) = \neg b \wedge \neg c \wedge (a \vee \neg a).$$

Для этого последовательно применим операцию с переменной и её инверсией и свойство операции конъюнкции:

$F (a, b, c) = \neg b \wedge \neg c \wedge (a \vee \neg a) = \{6\} = \neg b \wedge \neg c \wedge 1 = \{7\} = \neg b \wedge \neg c.$

Попробуйте ответить на следующие вопросы:

1) Как определяется истинность простого высказывания?
2) Как определяется истинность сложного (составного) высказывания?
3) Постройте таблицу истинности для функции $F (a, b) = \neg(a \wedge b)$